Soluzioni del compito del 29/07/2005

Primo esercizio

$\int_0^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{x^2+bx+c}$. Dette $z_\pm = \frac{1}{2}(-b \pm i\sqrt{4c-b^2})$ $z_+ = \sqrt{c}e^{i\vartheta_0}$, $z_- = \sqrt{c}e^{i(2\pi-\vartheta_0)}$, $(\cos\vartheta_0 = -\frac{b}{\sqrt{4c}}$, $\sin\vartheta_0 = -\frac{\sqrt{4c-b^2}}{\sqrt{4c}})$ si ha $2I = 2\pi i \lim_{z\to z_+} \frac{\sqrt{z}}{z-z_-} + 2\pi i \lim_{z\to z_-}\frac{\sqrt{z}}{z-z_+}$. $2I = 2\pi i\left(\frac{c^{1/4}e^{i\vartheta_0/2}}{i\sqrt{4c-b^2}} + \frac{c^{1/4}e^{i(\pi-\vartheta_0/2)}}{-i\sqrt{4c-b^2}}\right)$ da cui

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{4c-b^2}}(c^{1/4}e^{i\vartheta_0/2} + c^{1/4}e^{-i\vartheta_0/2}) = \frac{2\pi c^{1/4}}{\sqrt{4c-b^2}}\cos\frac{\vartheta_0}{2} = 2\frac{\pi c^{1/4}}{\sqrt{4c-b^2}}\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta_0}{2}} = \sqrt{2}\frac{\pi}{\sqrt{\sqrt{4c}+b}}$$

$I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2}$ e $I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2}$. Conviene risolvere l'integrale $I = \int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}\, d\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2}$ e poi prendere la parte reale e la parte immaginaria. Con il cambio di variabile $e^{i\vartheta} = z$ si ottiene $\int_{|z|=1}\frac{1}{i}\frac{z\, dz}{-az^2+z(a^2+1)-a}$ e le radici del denominatore sono: se $|a|>1$ $z_1 = \frac{1}{a}$, $z_2 = a$; se $|a|<1$ $z_1 = a$ e $z_2 = \frac{1}{a}$;. Se $|a|=1$ le radici starebbero sulla circonferenza unitaria ovvero il polinomio di secondo grado in ϑ si annullerebbe.

Sia $|a|>1$. Solo $z_1 \in \{|z|<1\}$ per cui l'integrale è $I = 2\pi i\frac{1}{i}\lim_{z\to\frac{1}{a}}\frac{1}{a}\frac{z}{-(z-a)} = \frac{2\pi}{a(a^2-1)}$. Ne segue che $I_1 = \frac{2\pi}{a(a^2-1)}$ e $I_2 = 0$

Sia $|a|<1$. Solo $z_1 \in \{|z|<1\}$ per cui l'integrale è $I = 2\pi i\frac{1}{i}\lim_{z\to a}\frac{1}{a}\frac{z}{-(z-\frac{1}{a})} = \frac{2\pi a}{1-a^2}$. Ne segue che $I_1 = \frac{2\pi a}{1-a^2}$ e $I_2 = 0$

$I_3 = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{1-2a\sin\vartheta+a^2}$ e $I_4 = \int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1-2a\sin\vartheta+a^2}$. La situazione è la stessa con la differenza che gli zeri del denominatore sono stavolta $z = ia$ e $z = \frac{i}{a}$. La procedura rimane la stessa. Alla fine il risultato è : se $|a|>1$ $I_3 = \frac{2\pi}{a(a^2-1)}$ e $I_4 = 0$ mentre se $|a|<1$ $I_3 = \frac{2\pi a}{1-a^2}$ e $I_4 = 0$

Secondo Esercizio

1) Si consideri la funzione $\frac{z}{(z-a)(z-b)} = \frac{z}{(z-z_o+z_o-a)(z-z_o+z_o-b)} = \frac{z}{(z_o-a)(1+\frac{z-z_o}{z_o-a})(z_o-b)(1+\frac{z-z_o}{z_o-b})} = \frac{z}{(z_o-a)(z_o-b)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z-z_o)^k}{(z_o-a)^k}\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{(z-z_o)^q}{(z_o-b)^q} = \frac{z}{(z_o-a)(z_o-b)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}} =$

$= \frac{1}{(z_o-a)(z_o-b)}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^{n+1}\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}} + \sum_{n=0}^{+\infty}z_o(z-z_o)^n\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}}\Big] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty}c_j(z-z_o)^j$

$$c_j = \frac{1}{(z_o-a)(z_o-b)}\Big[z_o\sum_{q=0}^{j}\frac{(-)^j}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{j-q}} + \sum_{q=0}^{j-1}\frac{(-)^{j-1}}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{j-q-1}}\Big]$$

2) $c_3 = -\frac{16}{(b-a)^4}$

3) Se $z_o = 0$ si ha $b_3 = \frac{3}{(ab)^3}$

4) $f(z) = \dfrac{z}{(z-a)(z-a+a-b)} = \dfrac{z}{z-a}\dfrac{1}{a-b}\dfrac{1}{1+\frac{z-a}{a-b}} = \dfrac{z}{z-a}\dfrac{1}{a-b}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\dfrac{(z-a)^k}{(a-b)^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(z-z_o)^j$ con

$$c_j = \frac{1}{a-b}\Big[\frac{(-)^j}{(a-b)^j} + a\frac{(-)^{j+1}}{(a-b)^{j+1}}\Big] = \frac{(-)^{j+1}b}{(a-b)^{j+2}}$$

Nel caso dello sviluppo di Laurent centrato in $z=b$ si ha $c_j = \dfrac{(-)^{j+1}a}{(b-a)^{j+2}}$

Terzo Esercizio Si veda la soluzione del compito del 9/12/04

Quarto Esercizio Sia $\gamma^{(e)}(t)$ la curva descrivente la porzione di curva giacente sull'ellisse e $\gamma^{(f)}(t)$ la curva descrivente la porzione di curva giacente sull'asse delle y con $-\alpha \le y \le \alpha$; m_1 e m_2 le rispettive masse. Siano poi $\delta_1(x,y) = |xy|$ e $\delta_2(x,y) = |y-q|$ con q variabile a seconda del compito. La formula che cerchiamo è

$$\frac{1}{m_1+m_2}\Big(\int_{\gamma^{(e)}} dt\cdot\gamma_2^{(e)}\cdot\delta(\gamma_1^{(e)},\gamma_2^{(e)})\cdot\|(\gamma^{(e)})'\| + \int_{\gamma^{(f)}} dt\cdot\gamma_2^{(f)}\cdot\delta(\gamma_1^{(f)},\gamma_2^{(f)})\cdot\|(\gamma^{(f)})'\|\Big)$$

$$m_1 = \int_{\gamma^{(e)}} dt\delta(\gamma_1^{(e)},\gamma_2^{(e)})\|(\gamma^{(e)})'\| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta ab|\cos\vartheta\sin\vartheta|\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta ab\cos\vartheta\sin\vartheta\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2\vartheta} = -\frac{2}{3}\frac{ab}{a+b}(a^2+ab+b^2),$$

$m_2 = q^2+\alpha^2$

Nella formula che cerchiamo il primo contributo è nullo in quanto si integra una funzione dispari su un intervallo simmetrico. $\displaystyle\int_{\gamma^{(f)}} dt\cdot\gamma_2^{(f)}\cdot\delta(\gamma_1^{(f)},\gamma_2^{(f)})\cdot\|(\gamma^{(f)})'\| = -q\alpha^2$

La formula finale è $\dfrac{-q\alpha^2}{m_1+m_2}$

Quinto Esercizio Sia $z = 1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ il paraboloide e sia $S = \{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, z=0\}$ e sia $V = \{z \le 1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}, z\ge 0\}$. Sia inoltre $\underline{F}(\underline{x}) = a(\underline{x})\underline{i}+b(\underline{x})\underline{j}+\underline{k}$, il campo vettoriale dove a e b sono tali che $div\underline{F}(\underline{x}) = y^2$ oppure x^2 a seconda del compito. Usando il teorema della divergenza, il risultato è $\displaystyle\int\int\int_V dxdydz(div\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}_e(\underline{x}))$ dove $\underline{n}_e(\underline{x}) = (0,0,-1)$. Facendo i conti si ha $\displaystyle\int\int\int_V dxdydz(div\underline{F}(\underline{x})) = 0$ mentre $\displaystyle\int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}_e(\underline{x})) = \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} 1\cdot(-1) = -\pi ab$. Si poteva anche calcolare direttamente il flusso ma le formule sono alquanto più lunghe.

Sesto Esercizio

$\mathbf{A}: \omega = d(x^2y^2)+d(\arctan\sqrt{x^2+y^2})$, $\mathbf{B}: \omega = d(xy^2)+d(\arctan\sqrt{x^2+y^2})$, $\mathbf{C}: \omega = d(x^2-y^2)+d(\arctan\sqrt{x^2+y^2})$, $\mathbf{D}: \omega = d(x^2+y)+d(\ln(2+\sqrt{x^2+y^2}))$. Sia $\omega = d(f)$ con f a seconda dei casi. Per calcolare l'integrale basta fare la differenza $f(P_{finale}) - f(P_{iniziale})$. Il risultato quindi è : 0 per **A** e **B**; 2 per **C** e **D**.